UNIDAD Nº2

Experimentos aleatorios. Espacio muestral. Sucesos.

Definición clásica y frecuencial de probabilidad.

Definición axiomática de probabilidad.

Teorema de la suma de probabilidades.

Probabilidad condicional.

Regla de la multiplicación de probabilidades.

Sucesos independientes.

Experimento Aleatorio

Hay cosas que ocurren por casualidad, sin que esté previsto y sin que existiera un motivo o causa para que acontezca. Cuando ocurren estas casualidades solemos sorprendernos y en muchos casos adjudicarlo a la "suerte" (o a la "mala suerte”).
Estas "casualidades" que observamos de vez en cuando nos hacen tomar conciencia de la existencia del azar.

Para abordar el estudio de estos fenómenos resulta necesario comprender el concepto **experimento aleatorio.**

Llamamos experimento aleatorio a los experimentos o fenómenos que se observan y que presentan las dos siguientes características:

impredecibilidad del resultado y posibilidad de repetirlo bajo esencialmente las mismas condiciones. Esta **impredecibilidad** se debe a la incidencia de una multiplicidad de causas. Por ejemplo al arrojar una moneda dependerá de la fuerza con que se la arroje, el tipo de piso en el que cae, etc. Otra característica de un experimento aleatorio es la posibilidad de repetirlo y se refiere en el ejemplo de la moneda a la posibilidad de arrojarla tantas veces como uno quiera. La medición de una magnitud física es un experimento aleatorio, cada medición que se realice es una repetición del experimento.

Es preciso darse cuenta que si bien no puede predecirse el resultado en muchos casos hay resultados que tienen mas posibilidad de ocurrir que otros. Basta pensar en una urna con 4 bolillas blancas y una roja. Al extraer al azar una bolilla de la urna puede ocurrir blanca o roja pero evidentemente es mas probable que salga blanca que roja. Lo que trataremos de medir es la posibilidad, chance o probabilidad de que ocurra un determinado resultado.
Antes de definir la probabilidad enfocaremos nuestra atención a los resultados posibles del experimento.

Suceso

Sea ε un experimento. Llamaremos suceso a todo conjunto formado por uno o mas resultados posibles del experimento.

Al llevar a cabo el experimento, un suceso determinado puede o no ocurrir. Supongamos, por ejemplo, que el experimento es el lanzamiento de un dado y consideremos el suceso A= “sale par”. Al realizar el experimento puede salir cualquiera de los números del 1 al 6. Si sale por ejemplo el 2 diremos que ocurrió el suceso A, si sale el 3, 5 o 7 diremos que no ocurrió el suceso A.
De acuerdo a la definición el conjunto formado por todos los resultados posibles es también un suceso. Se denomina suceso seguro, ya que siempre ocurre cada vez que se repite el experimento. Este suceso tiene particular importancia para el desarrollo de la teoría y recibe el nombre de espacio muestral En consecuencia damos la siguiente definición:

Espacio Muestral

Sea ε un experimento aleatorio. Definimos al **espacio muestral S** como el conjunto de todos los resultados posibles de ε.

En un problema concreto por lo general nos interesan algunos sucesos (no todos) para el que juega en la ruleta de un casino y piensa apostar a "par" le interesará conocer la probabilidad de que este suceso ocurra. El fabricante de computadoras que garantiza a la computadora por un año, le interesa saber la probabilidad de que la máquina falle antes del año y en consecuencia el suceso de interés es "la computadora falla antes del año".

Sucesos determinados por la unión e intersección de conjuntos

Ejemplo

El experimento consiste en extraer una bolita de una urna que contiene
- 2 bolitas azules
- 1 bolita blanca
- 1 bolita roja
- 1 bolita amarilla

Cada participante elige dos colores y recibe el premio si sale alguno de los colores elegidos. Supongamos que participan dos jugadores. Supongamos que el primer participante elige azul y blanco y con ello está apostando al suceso A_1 ={azul, blanco]. Por su parte el jugador 2 apuesta a la ocurrencia de A_2 ={azul, amarillo]
Preguntas

¿En qué situación ganan ambos? Respuesta: Intersección

¿En qué situación gana al menos uno? Repuesta: Unión

A continuación se realiza el cuadro de las intersecciones y se muestra el diagrama de Venn.

El esquema básico de los sucesos

	B	B^c	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap B^c)$	$P(A)$
A^c	$P(A^c \cap B)$	$P(A^c \cap B^c)$	$P(A^c)$
	$P(B)$	$P(B^c)$	1

Tabla Nº1

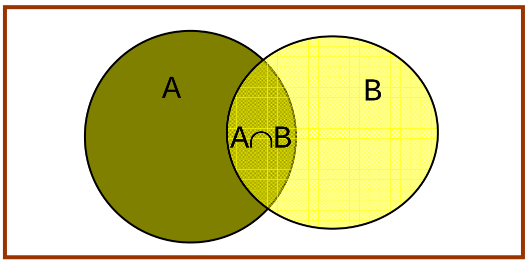


Fig. Nº1

Probabilidad

1ª tarea: Darse cuenta de la existencia de la probabilidad como concepto (antes de pensar en como medirla).
En cada una de las siguientes experiencias ¿A qué apostarían?

1) Al arrojar un dado. Al 1? Al 2?   Al 6?   Le da lo mismo?
2) Al arrojar un dado de 8 caras
3) Al girar una ruleta con sector rojo (270 grados) verde (90 grados).
4) Al arrojar dos monedas
5) Lanzamiento de dos dados
6) Extraer una bolita de una urna que contiene 2 rojas y tres blancas
7) Extracción de la misma urna de dos bolitas, sin reemplazo.

Luego de reconocer que algunos sucesos tienen mayor probabilidad que otros. Nos planteamos ¿cómo medir la probabilidad?
En el ej. 1 de arrojar el dado parece natural asignar a todos los valores la misma probabilidad.

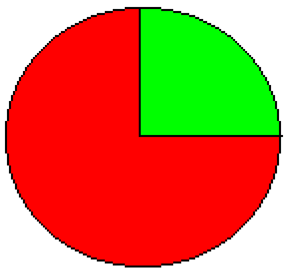
Valores	Probabilidad
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
	1

Tabla Nº2

A partir de esta tabla puede calcularse la probabilidad de otros sucesos por ej. "sale par".

Ejemplo 2 - Consideremos la siguiente ruleta:

El experimento consiste en hacer girar la ruleta y observar si cae en rojo o verde.



90º

270º

Fig. Nº2

Podemos razonar que de acuerdo a la proporción que ocupa cada color en el círculo las correspondientes probabilidades seran:

Resultado	Probabilidad
Rojo	0.75
Verde	0.25
	1

Tabla Nª3

Ejemplo 3- Consideremos ahora la siguiente situación: el experimento consiste en arrojar dos monedas ¿cuál es la probabilidad de "obtener un sol y un escudo"? Aquí la respuesta no es tan inmediata. Analicemos, los resultados posibles del experimento son

r1: (sol,sol)
r2:(sol,escudo)
r3: (escudo,sol)
r4: (escudo,escudo)

En la 1ª primera componente se consignan los resultados de la moneda 1 y en la 2ª componente se consignan los resultados de la moneda 2 (suponemos que las monedas son distinguibles).

Cada uno de estos cuatro resultados tiene igual posibilidad de ocurrir y por lo tanto su probabilidad es 0.25 . Se obtiene "un sol y un escudo" cuando ocurre cualquiera de los resultados r2 o r3. Resulta por lo tanto comprensible que la probabilidad buscada sea igual a 0.50 .

El ejemplo anterior señala un camino para resolver muchos problemas de calculo de probabilidad. Supongamos un experimento con resultados igualmente posibles

$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ r_5,\ \ldots\ r_c$

y por lo tanto la probabilidad de cada uno de ellos es 1/c. Supongamos además que deseamos calcular la probabilidad de un suceso conformado por k de estos resultados posibles. La probabilidad de dicho suceso será en consecuencia k/c.
Esto conduce a la ***definición clásica de probabilidad.***

Definición clásica de probabilidad

La probabilidad de que ocurra determinado suceso es igual al cociente entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles, siempre que estos sean igualmente posibles.

$$P(A) = \frac{\text{Nº de Casos Favorables de A}}{\text{Nº de Casos Posible}}$$

Experimento - Se arroja un par de dados

Supongamos que los dados son completamente simétricos y en consecuencia todas las caras tienen la misma probabilidad de ubicarse en la parte superior. Esta es una suposición importante que nos permitirá construir el modelo matemático para el fenómeno.

Los resultados del experimento de arrojar dos dados podemos expresarlos como pares ordenados:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)

(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)

(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)

(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)

(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)

(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)

Por la suposición realizada todos los resultados son igualmente posibles.

Pensemos ahora en el número de puntos que se pueden obtener al arrojar dos dados. Al realizar una vez el experimento, el obtener dos puntos, es un suceso que puede o no presentarse (ocurrir). Esta cantidad de puntos solo puede darse cuando obtengamos como resultado el (1,1), es decir 1 en el primer dado y 1 en el segundo. En cambio el suceso "se obtienen tres puntos", ocurre cuando tenemos como resultado (1,2) ó (2,1). Evidentemente el suceso "obtener tres puntos" tiene el doble de probabilidad de "obtener dos puntos". Es natural entonces dar la siguiente medida de la chance o "probabilidad" de un suceso:

$$P = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}}$$

Para el ejemplo tenemos:

Puntos	Probabilidad
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36
Total	1

Tabla Nº4

De esta manera, la suposición de simetría nos permitió construir un modelo matemático y por medio de él asignar a cada resultado posible un valor de probabilidad.

Este es un modelo adecuado para el fenómeno en estudio. Sin embargo son pocas las situaciones en que pueden resolverse tan sencillamente sobre el modelo a utilizar. En muchas oportunidades tendremos que recurrir a la experiencia, es decir tendremos que repetir el experimento un cierto número de veces para poder estudiar las características del fenómeno y así poder seleccionar un modelo apropiado. Al entrar en el mundo de la experiencia entramos en el terreno de la Estadística.

El trabajo experimental

La repetición del experimento produce una serie de datos que pueden ser analizados en una tabla de frecuencias. Siguiendo con el problema de arrojar dos dados, recurrir a la experiencia significaría ni más ni menos que proceder a realizar un cierto número de veces la experiencia concreta de arrojar dos dados.

Obtendremos en consecuencia como resultado un conjunto de datos producto de la observación de cada repetición de la experiencia.

Llamaremos frecuencia f de un suceso A, a la cantidad de veces que se presentó en n repeticiones del experimento el suceso A y frecuencia relativa al cociente f/n.

Así por ejemplo si en 50 repeticiones del experimento de arrojar dos dados, en 4 oportunidades se obtuvo dos puntos, decimos entonces que la frecuencia del suceso "obtener dos puntos" es 4 y la frecuencia relativa es 4/50.

Las siguientes tablas dan cuenta de lo ocurrido en dos series de lanzamientos, una de 50 y otra de 200.

Con 50 lanzamientos tenemos:

Puntos	Frecuencia	Frec. Relativa
2	4	0.08
3	3	0.06
4	6	0.12
5	6	0.12
6	5	0.10
7	6	0.12
8	5	0.10
9	8	0.16
10	5	0.10
11	2	0.04
12	0	0.00
Total	50	1

Tabla Nº5

Con 200 lanzamientos tenemos:

Puntos	Frecuencia	Frec. Relativa
2	6	0.030
3	14	0.070
4	17	0.085
5	25	0.125
6	25	0.125
7	34	0.170
8	26	0.130
9	24	0.120
10	14	0.070
11	8	0.040
12	7	0.035
Total	200	1

Tabla Nº6

En el gráfico observamos que las frecuencias relativas no están demasiado alejadas de las probabilidades y que al aumentar la cantidad de observaciones las frecuencias relativas se aproximan más a las correspondientes probabilidades.

Esta regularidad estadística es la que nos permite conocer los valores de probabilidad a partir de las frecuencias relativas.

Definición estadística de probabilidad

En los ejemplos anteriores conseguimos espacios muestrales con resultados igualmente posibles, que nos permitieron utilizar la definición clásica de probabilidad.

Los fundamentos que permiten considerar a los resultados como igualmente posibles surgen de la simetría que encierra el experimento. Sin embargo en

la práctica no son muchas las situaciones en que puede efectuarse ese tipo de consideraciones. Por este motivo se utiliza en muchos casos la **definición estadística de la probabilidad, admitiendo como probabilidad de un suceso a la frecuencia relativa del mismo cuando se realiza un número suficientemente grande de repeticiones del experimento.**
Veremos ejemplos sobre la utilización de este tipo de probabilidad:

Ejemplo 1: Una máquina produce tornillos que pueden clasificarse en "buenos" y "defectuosos". ¿ Cuál es la probabilidad de que un tornillo producido por la máquina sea defectuoso?.

El espacio muestral es: S={B,D} donde en general los resultados no son igualmente posibles. B:"Tornillo bueno", D:"Tornillo defectuoso"

Para calcular P(D) tendremos que observar una muestra grande de artículos producidos por la máquina (supongamos de tamaño n), contar la cantidad de defectuosos, esto es la frecuencia (n_D) del suceso, y hacer el cociente (n_D/n) para obtener una estimación de la probabilidad.

Ejemplo 2: Un tirador dispara a un blanco ¿cuál es la probabilidad de que el disparo dé en el blanco?

El espacio muestral está dado por;

S={Acierta,Falla}

La única posibilidad de responder a la pregunta planteada es que el tirador realice un número grande de disparos, y luego calcule la proporción de aciertos, es decir la frecuencia relativa.

Ahora, definiremos con más precisión la frecuencia relativa y daremos algunas de sus propiedades.

DEFINICION: Llamaremos frecuencia relativa de un suceso A, a;

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

donde n es el número de repeticiones del experimento y n_A es el número de veces que el suceso A ocurrió en las n repeticiones.

PROPIEDADES: La frecuencia relativa tiene las siguientes propiedades fácilmente verificables:

1) $0 \leq f_A \leq 1$
2) $f_A=1$ si y solo si A ocurre cada vez en las n repeticiones.
3) $f_A=0$ si y solo si A nunca ocurre en las n repeticiones.
4) Si A y B son dos sucesos que se excluyen mutuamente y si f_{AUB} es la frecuencia relativa asociada al suceso AUB, entonces
$$f_{AUB} = f_A + f_B$$
5) A medida que n crece f_A se aproxima a un valor fijo P(A).

Población y muestra

El conjunto de las repeticiones posibles constituye la **población** y es al mismo tiempo el conjunto sobre el que se desea obtener conclusiones por tal motivo las condiciones bajo las cuales se realiza el experimento están estrechamente relacionadas a la población que se quiere conocer o describir. Por su parte la **muestra** está constituida por un conjunto finito de repeticiones del experimento. Cuando aumenta la cantidad de repeticiones del experimento es decir cuando aumenta el tamaño de la muestra la frecuencia relativa se aproxima a la probabilidad (ley de los grandes números). Esto posibilita interpretar a la probabilidad como la proporción de veces que ocurrirá el suceso en las infinitas repeticiones del experimento.

DEFINICION AXIOMATICA DE PROBABILIDAD

DEFINICION: Sea ε un experimento y sea S un espacio muestral asociado con ε. Con cada suceso A asociaremos un número real designado por P(A) y llamado la probabilidad de A que satisface las siguientes propiedades:

1) $P(A) \geq 0$ para cualquier suceso A

2) $P(S) = 1$

3) Si A1 A2 A3.....An son sucesos tales que $A_i \cap A_j = \phi$ con $i \neq j$

$$P(A1 \cup A2 \cup \ldots \cup An) = P(A1) + P(A2) + \ldots + P(An)$$

TEOREMA 1: $P(\phi)=0$

DEMOSTRACION: Sea A un suceso. Se cumple que $A = A \cup \phi$

Por la propiedad 3, $P(A)=P(A)+P(\phi)$. Y esto es válido si y solo si $P(\phi)=0$.

TEOREMA 2: Si A es un suceso y A^c es el suceso contrario de A(denominado complemento de A),

entonces: $P(A^c)=1-P(A)$

DEMOSTRACION:

$$S = A \cup A^c \quad \text{con} \quad A \cap A^c = \phi$$

Por el axioma 3: $P(S)=P(A)+P(A^c)$

Por el axioma 2: $P(S)=1$

En consecuencia: $P(A)+P(A^c)=1$

Entonces: $P(A^c)=1-P(A)$

TEOREMA 3: Si A y B son dos sucesos cualesquiera, entonces

$$P(AUB)= P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la siguiente tabla:

	B	B^c	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap B^c)$	$P(A)$
A^c	$P(A^c \cap B)$	$P(A^c \cap B^c)$	$P(A^c)$
	$P(B)$	$P(B^c)$	1

Tabla Nº7

En primer lugar veamos que de la tabla Nº1

$A =(A \cap B)(A \cap B^c)$
y por lo tanto, por el axioma o propiedad 3:

$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$ (que también se observa en tabla Nº7)

De manera análoga se obtiene la P(B):

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

Utilizando la Fig. Nº1 la unión de los sucesos A y B se puede escribir como unión de sucesos cuya intersección es vacía:

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

Por lo tanto:

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

De la expresión de P(A) deducimos que: $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
Y de la expresión de P(B) tenemos que: $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Reemplazando estas dos últimas ecuaciones en la anterior obtenemos el resultado propuesto, es decir:

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{(Tesis)}$$

TEOREMA 4: Si A, B y C son tres sucesos cualesquiera:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$$

TEOREMA 5: Si A incluido en B $\Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

DEMOSTRACION: Escribiendo el suceso B como la unión de dos sucesos cuya intersección es vacía hacemos:

$$B = A \cup (A^c \cap B)$$

De acuerdo al axioma o propiedad 3:

$$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B) \geq P(A) \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

COROLARIO: Si A es un suceso cualquiera, entonces;

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

DEMOSTRACION: inmediata, ya que cualquiera sea A, siempre $A \subset S$.
Además por el Axioma 2, P(S)=1.

Ejemplo: Se extraen dos bolas con remplazo (sin reemplazo) de una urna que contiene 6 bolas, de las cuales cuatro son blancas y dos rojas. Encuentre la probabilidad de que:

a) "la primera sea blanca"
b) "la segunda sea blanca"
c) "ambas sean blancas"
d) "al menos una de las bolillas extraídas es blanca"

<u>Con reemplazo:</u>

Suponiendo que se han enumerado las bolitas asignando 1,2,3,4 a las blancas y 5 y 6 a las rojas, el espacio muestral es:

S={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)

(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)
(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)
(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)
(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

A = "la primera es blanca" $P(A)= \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

B = "la segunda es blanca" $P(B)= \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

P("ambas sean blancas") = $P(A \cap B)= \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

P("al menos una sea blanca")=$P(AUB)=P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

Usando la definición clásica puede completarse la siguiente tabla que brinda las probabilidades de las intersecciones.

	B	B^c	
A	4/9	2/9	2/3
A^c	2/9	1/9	1/3
	2/3	1/3	1

Tabla Nº8

<u>Sin reemplazo:</u>

```
S = {     ,(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)
    (2,1),     ,(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)
    (3,1),(3,2),     ,(3,4),(3,5),(3,6)
    (4,1),(4,2),(4,3),     ,(4,5),(4,6)
    (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),     ,(5,6)
    (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),     }
```

A ="la primera es blanca" $P(A)= \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

B ="la segunda es blanca" $P(B)= \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

OBSERVACION: Si en lugar de una urna con bolillas blancas y rojas la interpretamos como una góndola con sachet de leche, buenos y malos, observamos que:
La probabilidad de obtener un sachet de leche buena en la primera extracción es igual a la probabilidad de obtener un sachet de leche buena en la segunda extracción. CONCLUSIÓN: No pelearse por ser el primero.

P("ambas sean blancas") = $P(A \cap B) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

P("al menos una sea blanca") = $P(AUB) = P(A)+P(B)- P(A\cap B)$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$$

También pueden obtenerse estas probabilidades de la siguiente tabla que brinda las probabilidades de las intersecciones

	B	B^C	
A	12/30	8/30	2/3
A^C	8/30	2/30	1/3
	2/3	1/3	1

Tabla N º9

FRECUENCIAS RELATIVAS CONDICIONALES y PROBABILIDADES CONDICIONALES

Continuemos analizando el caso de muestreo sin reemplazo de dos bolillas de una urna que contiene 4 bolillas blancas y dos rojas. El siguiente cuadro nos brinda las probabilidades de las intersecciones:

Tabla de distribución de probabilidades

	B	B^c	
A	12/30	8/30	2/3
A^c	8/30	2/30	1/3
	2/3	1/3	1

Tabla Nº 10

Realizar el experimento significa hacer dos extracciones al azar en forma sucesiva de la urna que contiene 4 bolillas blancas y 2 rojas.
Si se repite el experimento una cierta cantidad n de veces se obtendría la siguiente tabla de distribución de frecuencias

Tabla de distribución de frecuencias

	B	B^c	
A	$f(A \cap B)$	$f(A \cap B^c)$	$f(A)$
A^c	$f(A^c \cap B)$	$f(A^c \cap B^c)$	$f(A^c)$
	$f(B)$	$f(B^c)$	1

Tabla Nº 11

Haciendo el cociente entre la frecuencia y el total de repeticiones n, se tiene la frecuencia relativa. Se puede construir una tabla similar a la anterior, para las frecuencias relativas. Estas por lo general serán próximas a las probabilidades, si el número de repeticiones es grande.

Definiremos ahora un tipo especial de frecuencias relativas, las llamaremos **frecuencias relativas condicionales.** La denotaremos con $f_r(B/A)$ y representa la proporción de veces que ocurrió B dentro del total de veces que ocurrió A. Es decir

$$f_r(B/A) = \frac{f(A \cap B)}{f(A)}$$

La frecuencia relativa condicional puede obtenerse también de la tabla de frecuencias relativas, ya que:

$$f_r(B/A) = \frac{f(A \cap B)}{f(A)} = \frac{f(A \cap B)/n}{f(A)/n} = \frac{f_r(A \cap B)}{f_r(A)}$$

En la expresión obtenida

$$f_r(B/A) = \frac{f_r(A \cap B)}{f_r(A)}$$

observemos que: $f_r(A \cap B)$ tiende a $P(A \cap B)$ y que $f_r(A)$ tiende a $P(A)$

de modo que: $f_r(B/A)$ tiende a $P(A \cap B)/P(A)$

Ese valor hacia el cual tiende la ***frecuencia relativa*** condicional lo llamamos ***Probabilidad Condicional.***

DEFINICIÓN: Sea A un suceso con P(A)>0. Si B es un suceso cualquiera, entonces **la probabilidad condicional de B dado A**, se define de la siguiente manera.

$$\mathbf{P(B/A)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}} \quad \textbf{si} \quad \mathbf{P(A)>0} \qquad \textbf{(1)}$$

En el ejemplo que estamos considerando:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{12/30}{20/30} = \frac{3}{5}$$

Observación.

En este ejemplo la probabilidad condicional puede calcularse también, sin utilizar la definición, razonando de la siguiente manera: si ocurre A es decir si en la primera extracción salió blanca, en la urna quedan cinco bolitas de las cuales tres son blancas y por lo tanto

$$P(B/A)= 3/5.$$

En este caso resulto muy sencillo calcular la probabilidad condicional por tratarse de un experimento compuesto y estar A relacionado a una parte (primera extracción) y B a otra parte (segunda extracción) del experimento.

Conocida la probabilidad condicional es posible utilizar la expresión (1) para calcular la probabilidad de la intersección (sin utilizar el espacio muestral S).

$$P(A \cap B)= P(A) * P(B/A)= 4/6 * 3/5 =12/30$$

ALGUNAS CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD CONDICIONAL REGLA DE MULTIPLICACIÓN DE PROBABILIDADES

Por la definición de probabilidad condicional

$$P(B/A)= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{si } P(A)>0$$

De allí obtenemos:

$$P(A \cap B)= P(A) * P(B/A)$$

Este resultado puede generalizarse para n sucesos A1...An, obteniendo lo que llamamos **regla de multiplicación de probabilidades:**

$$\mathbf{P(A1 \cap A2 \cap ......An)= P(A1)P(A2/A1)......P(An/A1 \cap A2 \cap .. \cap An\text{-}1)}$$

La regla de multiplicación de probabilidades se utiliza generalmente para calcular la probabilidad de sucesos asociados con experimentos aleatorios compuestos y en donde resulta sencillo el cálculo de la probabilidad condicional.

Ejemplo 1: Una caja contiene 100 tornillos de los cuales 20 son defectuosos. Se seleccionan dos tornillos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos tornillos sean defectuosos?

$$P(\text{ambos defectuosos}) = P(1^o\text{defec.} \cap 2^o\text{defec.})$$

$$= P(1^o\text{defec.})\ P(2^o\text{defec.}/1^o\text{defec.})$$

$$= 20/100 * 19/99 =0.038$$

INDEPENDENCIA DE SUCESOS

DEFINICION: Dos sucesos A y B se dicen independientes si

$$P(B/A)=P(B)$$

TEOREMA: **A y B son independientes $\Longleftrightarrow$ $P(A \cap B)= P(A)*P(B)$**

DEMOSTRACIÓN

En el sentido $\Longrightarrow$, tenemos:
Según la hipótesis sabemos que A y B son independientes, por lo tanto $P(B/A)=P(B)$
De la definición de probabilidad condicional se tiene que:

$$P(A \cap B)= P(A)*P(B/A)$$

Reemplazando la hipótesis en la última expresión nos queda que:

$$P(A \cap B)= P(A)*P(B) \text{ (Tesis)}$$

En el sentido $\Longleftarrow$, hacemos:
Según la hipótesis sabemos que $P(A \cap B)= P(A)*P(B)$, despejando $P(B)$ nos queda:

$$P(B)= P(A \cap B)/P(A)$$

Pero el segundo miembro es la definición de la probabilidad condicional:

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A)$$

Entonces comparando las igualdades concluimos que:

$$P(B/A) = P(B)$$

Por lo que A y B son independientes (Tesis)